Чернышов А. Д., Горяйнов В. В.
A. D. Chernyshov, V. V. Goryainov

НАПРЯЖЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЕ, ЗАКРЕПЛЁННОЙ В НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ

STRESSES IN A RECTANGULAR MEMBRANE FIXED IN AN INCLINED PLANE UNDER ALTERNATING LOAD

Чернышов Александр Данилович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Воронежского государственного университета инженерных технологий (Россия, Воронеж).
Alexander D. Chernyshov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Higher Mathematics Department, Voronezh State University of Engineering Technologies (Russia, Voronezh).

Горяйнов Виталий Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики Воронежского государственного технического университета (Россия, Воронеж).
Vitaly V. Goryainov – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Applied Mathematics and Mechanics Department, Voronezh State Technical University (Russia, Voronezh).

Аннотация. Построено точное решение задачи о прогибах прямоугольной мембраны, закреплённой в наклонной плоскости, под действием переменной нагрузки. Приводится анализ распределения напряжений в мембране, из которого следует, что изменение формы мембраны с квадратной на прямоугольную приводит к изменению количества точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$ и увеличению значения $\tilde{\sigma}_{\max}$.

Summary. The exact solution of the problem of deflections of a rectangular membrane fixed in an inclined plane under the action of a variable load is constructed. An analysis of the stress distribution in the membrane is presented, from which it follows that changing the shape of the membrane from square to rectangular leads to a change in the number of points with $\tilde{\sigma}_{\max}$ and an increase in the value of $\tilde{\sigma}_{\max}$.

Ключевые слова: прогиб мембраны, прямоугольная мембрана, компоненты напряжений, переменная нагрузка, точное решение, уравнение Пуассона, быстрые разложения.

Key words: membrane deflection, rectangular membrane, stress components, alternating load, exact solution, Poisson equation, fast expansions.

Статья рекомендована к публикации оргкомитетом III научной конференции с международным участием «Вычислительные технологии и прикладная математика», проведённой 7-11 октября 2024 г. на базе Комсомольского-на-Амуре государственного университета.

УДК 539.3+517.95

Введение. В качестве пространственных тонколистовых металлических конструкций покрытия используют мембраны [1]. При решении задачи о прогибах мембраны чаще всего рассматривается жёстко закреплённый контур мембраны, расположенный в горизонтальной плоскости [2–4]. В данной работе будем определять прогибы прямоугольной мембраны, закреплённой в наклонной плоскости, под действием переменной нагрузки.

Решение задачи и анализ результатов. Прогибы мембраны описываются уравнением Пуассона:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+F(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Omega_{\square},\ \ 0\le x\le a,\ \ 0\le y\le b, \tag{1}$$

где $F(x,y)$ нагрузка на мембрану.

Граничные условия зададим в виде

$$w\big|_{x=0} = f_1(y),\quad w\big|_{y=0} = f_2(x),\quad w\big|_{x=a} = f_3(y),\quad w\big|_{y=b} = f_4(x). \tag{2}$$

Решение краевой задачи (1), (2) должно удовлетворять условиям согласований:

$$\begin{gathered} f_1(0)=f_2(0),\quad f_2(a)=f_3(0),\quad f_3(b)=f_4(a),\quad f_1(b)=f_4(0),\\ w_{xx}(0,0)+w_{yy}(0,0)+F(0,0)=0,\quad w_{xx}(a,0)+w_{yy}(a,0)+F(a,0)=0,\\ w_{xx}(0,b)+w_{yy}(0,b)+F(0,b)=0,\quad w_{xx}(a,b)+w_{yy}(a,b)+F(a,b)=0. \end{gathered} \tag{3}$$

Равенства (3) следуют из независимости величины прогибов $w(x,y)$ от направления подхода к этим углам.

Функцию $w(x,y)$ представим конечным выражением в виде суммы граничной функции второго порядка и ряда Фурье по синусам, в котором учтены два коэффициента Фурье [4, 5]:

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^{4} A_i(y)P_i(x)+A_5(y)\sin\pi\frac{x}{a}+A_6(y)\sin 2\pi\frac{x}{a},\ 0\le x\le a\,, \tag{4}$$

$$A_i(y)=\sum_{j=1}^{4} A_{i,j}P_j(y)+A_{i,5}\sin\pi\frac{y}{b}+A_{i,6}\sin 2\pi\frac{y}{b},\ i=1...6,\ 0\le y\le b\,,$$

$$P_1(y)=1-\frac{y}{b}\,,\ P_2(y)=\frac{y}{b}\,,\ P_3(y)=\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{3}\,,\ P_4(y)=\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{6},$$

$$P_1(x)=1-\frac{x}{a}\,,\ P_2(x)=\frac{x}{a}\,,\ P_3(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\,,\ P_4(x)=\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\,.$$

В работе [4] приведено точное решение краевой задачи (1), (2) в общем виде, выраженное через постоянные коэффициенты, входящие в выражение нагрузки $F(x,y)$ и функций $f_1(y),\ f_2(x),\ f_3(y),\ f_4(x)$ из граничных условий (2). Подбирая определённым образом значения этих постоянных коэффициентов, можно задать конкретный вид граничных условий и нагрузки $F(x,y)$. Для задания положения прямоугольной мембраны в наклонной плоскости запишем граничные условия линейным законом:

$$\begin{gathered} w\big|_{x=0}=f_1(y)=w_1P_1(y)+w_2P_2(y),\quad w\big|_{y=0}=f_2(x)=w_1P_1(x)+w_3P_2(x),\\ w\big|_{x=a}=f_3(y)=w_3P_1(y)+w_4P_2(y),\quad w\big|_{y=b}=f_4(x)=w_2P_1(x)+w_4P_2(x), \end{gathered} \tag{5}$$

где $w_i,\ i=1...4$ – прогибы в углах прямоугольной мембраны.

В этом случае переменная нагрузка будет иметь вид

$$\begin{gathered} F(x,y)=\big(Q_1P_3(y)+Q_2P_4(y)\big)P_1(x)+\big(Q_3P_3(y)+Q_4P_4(y)\big)P_2(x)+\\ +\big(Q_1P_1(y)+Q_2P_2(y)\big)P_3(x)+\big(Q_3P_1(y)+Q_4P_2(y)\big)P_4(x). \end{gathered} \tag{6}$$

В результате получим точное решение задачи (1), (2) в виде (4) для куполообразной нагрузки (6) и граничных условий (5):

$$\begin{gathered} w(x,y)=\big(w_1P_1(y)+w_2P_2(y)\big)P_1(x)+\big(w_3P_1(y)+w_4P_2(y)\big)P_2(x)-\\ -\big(Q_1P_3(y)+Q_2P_4(y)\big)P_3(x)-\big(Q_3P_3(y)+Q_4P_4(y)\big)P_4(x). \end{gathered}$$

В качестве материала мембраны выберем конструкционную углеродистую сталь обыкновенного качества марки ВСт3пс [1] со следующими характеристиками [5]: $R_y = 2{,}35 \cdot 10^8$ Па, $\nu = 0{,}25$, $E = 2{,}13 \cdot 10^{11}$ Па, где R_y – расчётное сопротивление материала мембраны.

Значения параметров a, b, Q_i, w_i, $i = 1...4$ подбирались так, чтобы напряжения не превосходили расчётное сопротивление материала мембраны при двухосном напряжённом состоянии [1, 3]:

$$\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2} = \tilde{\sigma} \le R_y, \tag{7}$$

где

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right),\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right),\ \varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\ \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

Значения $\tilde{\sigma}_{\max}$, рассчитанные по формуле (7) при различных значениях a, b и $w_1 = w_2 = 0{,}011$, $w_3 = w_4 = 0{,}0113$, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 4 \cdot 10^{-2}$, приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Значения $\tilde{\sigma}_{\max}$ в мембранах одинаковой площади и различном отношения a/b при удлинении горизонтальной стороны

Размеры мембраны, м	$a = b = 1$	$a = 1/2$, $b = 2$	$a = 1/3$, $b = 3$	$a = 1/4$, $b = 4$
Значение $\tilde{\sigma}_{\max}$, Па	$0{,}80 \cdot 10^6$	$3{,}2 \cdot 10^6$	$7{,}2 \cdot 10^6$	$1{,}28 \cdot 10^7$
Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	1	1	1	1
Координаты точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	$(a;\ b/2)$	$(a;\ b/2)$	$(a;\ b/2)$	$(a;\ b/2)$

Таблица 2

Значения $\tilde{\sigma}_{\max}$ в мембранах одинаковой площади и различном отношения a/b при удлинении наклонной стороны

Размеры мембраны, м	$a = b = 1$	$a = 2$, $b = 1/2$	$a = 3$, $b = 1/3$	$a = 4$, $b = 1/4$
Значение $\tilde{\sigma}_{\max}$, Па	$0{,}80 \cdot 10^6$	$2{,}5 \cdot 10^6$	$5{,}7 \cdot 10^6$	$1{,}1 \cdot 10^7$
Количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	1	2	2	2
Координаты точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$	$(a;\ b/2)$	$(a/2;\ b)$ $(a/2;\ 0)$	$(a/2;\ b)$ $(a/2;\ 0)$	$(a/2;\ b)$ $(a/2;\ 0)$

Заключение. Если прямоугольная мембрана закреплена в наклонной плоскости, то габаритные размеры мембраны влияют на количество точек с максимальным напряжением $\tilde{\sigma}_{\max}$ и на величину $\tilde{\sigma}_{\max}$. У квадратной мембраны имеется одна точка с $\tilde{\sigma}_{\max}$, расположенная в середине одной из сторон. У прямоугольной мембраны количество точек с $\tilde{\sigma}_{\max}$ зависит от того, какая из сторон удлиняется – горизонтальная или наклонная. Возможны два варианта расположения точек:

1. две точки – в серединах двух длинных сторон $(a/2;\ b)$ $(a/2;\ 0)$ (см. табл. 2);
2. одна точка – в середине одной длинной стороны $(a;\ b/2)$ (см. табл. 1).

Также в ходе вычислительных экспериментов установлено, что наименьшие напряжения $\tilde{\sigma}_{\max}$ из всех возможных отношений a/b наблюдаются у квадратной мембраны (см. табл. 1 и 2). Если в качестве металлических конструкций покрытия необходимо использовать прямоугольную мембрану, то с целью уменьшения в ней напряжений её наклонная сторона должна быть длиннее горизонтальной (см. табл. 1 и 2), а габаритные размеры должны быть приближены к квадратным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремеев, П. Г. Пространственные тонколистовые металлические конструкции покрытий / П. Г. Еремеев. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 2006. – 560 с.
2. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
3. Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
4. Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов, С. Ф. Кузнецов [и др.] // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. – № 70. – С. 127-142.
5. Чернышов, А. Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений / А. Д. Чернышов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54. – № 1. – С. 13-24.
6. Сталь марки ВСт3пс // Центральный металлический портал. – URL: http://metallicheckiy-portal.ru/marki_metallov/stk/VSt3ps (дата обращения: 24.10.2024). – Текст: электронный.